e4a concours

Concours ENSAM - ESTP - ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1

durée 4 heures

On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
a et b désignent deux réels tels que $a < b$. On pose $\Omega = [a,b]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

On désigne par $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
On désigne par $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur Ω, à valeurs réelles.
On admet que tout élément K de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ est borné sur Ω.

Pour toute fonction f, élément de $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, on note $\|f\| = \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)^{1/2}$.

Première partie

I-1 Soit $K \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ on note $\|\|K\|\| = \left(\iint_\Omega (K(x,y))^2 dxdy\right)^{1/2}$.

Montrer que l'application de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à K associe $\|\|K\|\|$ est une norme.

I-2 On pose $\begin{cases} A(x) = \left(\int_a^b (K(x,y))^2 dy\right)^{1/2} \\ B(y) = \left(\int_a^b (K(x,y))^2 dx\right)^{1/2} \end{cases}$. Comparer $\int_a^b (A(x))^2 dx$, $\int_a^b (B(y))^2 dy$ et $\|\|K\|\|$.

I-3 Soient $K \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on pose $g(y) = \int_a^b K(x,y) f(x) dx$.

Montrer que $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et que $\|g\| \leq \|\|K\|\| \, \|f\|$.

Dans toute la suite du problème on choisit $a = 0$, $b = 1$ et on suppose que $K \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall\, y > x \qquad K(x,y) = 0 \ .$$

Soit f un élément donné de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et soit (x, y) un élément fixé de Ω.

Tournez la page S.V.P.

Deuxième partie

II-1 On pose $K_1(x,y)=K(x,y)$ et par récurrence pour n entier naturel strictement positif

$$K_{n+1}(x,y)=\int_0^1 K(x,z)\,K_n(z,y)\,dz\,.$$

Montrer que l'on a : $K_n \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ et $K_n(x,y)=0$ pour $y>x$.

II-2 Soit n un entier naturel strictement positif, montrer que :

$$\forall r \in \{1,\cdots,n\}\ ,\ K_{n+1}(x,y)=\int_0^1 K_r(x,z)\,K_{n+1-r}(z,y)\,dz\,.$$

II-3 On pose $\Phi_1(x) = f(x)+\int_0^x K(x,t)\,f(t)\,dt$ et par récurrence

$$\Phi_{n+1}(x) = f(x)+\int_0^x K(x,t)\,\Phi_n(t)\,dt\,.$$

On pose: $\begin{cases} \Psi_0(x) = f(x) \\ \Psi_{n+1}(x) = \int_0^x K(x,t)\Psi_n(t)\,dt \end{cases}$, pour n entier naturel

Montrer que $\Phi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \Psi_j(x)$.

II-4 Montrer que $\Psi_j(x) = \int_0^x K_j(x,t)f(t)\,dt$, pour tout entier naturel strictement positif j.

II-5 Montrer que $(K_2(x,y))^2 \le (A(x))^2(B(y))^2$.

II-6 On pose $\begin{cases} F_1(x,y) = \int_y^x (A(z))^2\,dz & \text{si } y \le x \\ F_1(x,y) = 0 & \text{si } y > x \end{cases}$ et par récurrence pour $n \ge 2$

$$F_n(x,y) = \int_y^x (A(z))^2 F_{n-1}(z,y)dz\ .$$

Montrer que pour tout $n \ge 1$, F_n est une fonction continue sur Ω et que $F_n(x,y) = 0$ si $y > x$.

II-7 Montrer que $F_n(x,y) = \frac{1}{n!}(F_1\ (x,y))^n$.

II-8 Montrer que $(K_{n+2}(x,y))^2 \le (A(x))^2(B(y))^2 F_n(x,y)$.

Troisième partie

III-1 Soit n un entier naturel strictement positif.
x étant fixé dans [0 , 1] , on désigne par V_n la fonction définie par $V_n(t) = K_n(x,t)$
De même , y étant fixé dans [0 , 1] ,on désigne par U_n la fonction définie par $U_n(t) = K_n(t,y)$.
Montrer que les séries de fonctions de terme général U_n et V_n sont uniformément convergentes sur [0 , 1].

III-2 On pose $H(x,y) = -\sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,y)$. Montrer que $H(x,y)$ vérifie :

$$K(x,y)+H(x,y) = \int_y^x K(x,z)H(z,y)\,dz\ .$$

III-3 On pose $\Phi_{(f)}(x) = f(x)-\int_0^x H(x,t)f(t)\,dt$. Justifier l'existence de $\Phi_{(f)}$.

Montrer que $\Phi_{(f)}$ est un élément de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

III-4 Montrer que la suite de fonctions Φ_n converge vers $\Phi_{(f)}$.

III-5 Soient Λ et g deux éléments de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, vérifiant

$$\Lambda(u) = g(u) - \int_0^u H(u,t)\, g(t)\, dt \quad \text{pour tout} \quad u \in [\,0\,,\,1\,] \ .$$

Montrer que cette relation équivaut à $\Lambda(u) - \int_0^u K(u,t)\Lambda(t)dt = g(u)$.

III-6 Soit $\Phi \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ qui vérifie pour tout $u \in [\,0\,,\,1\,]$: $\Phi(u) = \int_0^u K(u,t)\, \Phi(t)dt$.

Montrer que $\forall u \in [\,0\,,\,1\,], \Phi(u) = \ 0$

Les parties IV et V sont indépendantes.

Quatrième partie *Premier exemple d'application.*

Dans toute cette partie on pose $K(x,y)=\begin{cases}(x-y)\,e^{x-y} & \text{si} \quad y \le x \\ 0 & \text{si} \quad y > x\end{cases}$ et $\Omega=[0,1]^2$

IV-1 Calculer $K_n(x,y)$.

IV-2 En déduire $H(x,y)$.

IV-3 Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ une fonction connue. Trouver $\Phi_{(f)} \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\Phi_{(f)}(x) - \int_0^x K(x,y)\, \Phi_{(f)}(y)\, dy = f(x)$$

IV-4 On pose $f(x)=e^x$. Calculer $\Phi_{(f)}$.

Cinquième partie *Second exemple d'application.*

Soit q un entier naturel strictement positif, on se donne q fonctions $a_i \in \mathcal{C}([\,0,1], \mathbb{R})$, $i \in \{1,\ldots,q\}$ et $F \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, ainsi que q réels c_i, $i \in \{0,\ldots,q-1\}$.

On cherche à résoudre le problème suivant :

($\mathcal{P}$) Trouver une fonction u vérifiant $\forall x \in [0,1]$: $\begin{cases} u^{(q)}(x)+a_1(x)u^{(q-1)}(x)+\cdots+a_q(x)u(x)=F(x) \\ u(0)=c_0\ , u'(0)=c_1\ , \cdots , u^{(q-1)}(0)=c_{q-1}\end{cases}$.

On pose $\begin{cases} K(x,y)=\sum_{k=1}^{q} a_k(x)\dfrac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} & \text{si} \quad y \le x \\ K(x,y)=0 & \text{si} \quad y > x\end{cases}$ et $\Phi(x)=u^{(q)}(x)$.

Calculer $\Phi(x)+\int_0^x K(x,y)\Phi(y)dy$. En déduire une méthode de résolution du problème ($\mathcal{P}$).